24-11-21

7η Διάλεξη

Λήμμα: (X,d) τοπικά συμπαγής μ.χ. $A \subseteq V \subseteq X$,
A συμπαγές, V ανοιχτό. Τότε, $\exists$
O, $O \subseteq X$, O ανοιχτό τ.ω $A \subseteq O \subseteq \overline{O} \subseteq V$
και $\overline{O}$ συμπαγές.

Αρκετά σημαντικό

Απόδειξη

- $\forall\ x \in A\ \exists\ r'_x > 0$ τ.ω $\overline{B(x, r'_x)}$ συμπαγής.
- $(A \subseteq V,\ V$ ανοιχτό$)$ $\forall\ x \in A,\ \exists\ r''_x > 0\ B(x, r''_x) \subseteq V$
Θέτω $r_x := \min\{r'_x, r''_x/2\}$ Τότε $\boxed{B(x,r_x) \subseteq V}$
και $\boxed{\overline{B(x,r_x)} \subseteq \overline{B(x,r'_x)}\ \text{συμπαγές}} \Rightarrow$ 1η ιδιότητα
$\overline{B(x,r_x)}$ συμπαγές $\forall\ x \in A$. 2η ιδιότητα
- $\overline{B(x,r_x)} \subseteq \overline{B(x, r''_x/2)}$
Έστω $\{x_n\} \subseteq B(x, r''_x/2)$ τ.ω $x_n \to y \in X$.
$d(x,y) \le d(x,x_n) + d(x_n,y) < \dfrac{r''_x}{2} + d(x_n,y)$
$\overset{d(x_n,y)\to 0}{\Longrightarrow}\ d(x,y) \le r''_x/2 < r''_x \Rightarrow y \in B(x, r''_x) \subseteq V$

$\Rightarrow \boxed{\overline{B(x,r_x)} \subseteq V}\ \forall\ x \in A$
$\to$ 3η ιδιότητα

- $\{B(x,r_x) : x \in A\}$ ανοιχτή κάλυψη του A
$\overset{\text{συμπαγές}}{\Longrightarrow}\ \exists\ x_1, \dots, x_m \in A$ τ.ω $A \subseteq \underbrace{\bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, r_{x_i})}_{O}$

$\Rightarrow A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \overline{B(x_i, r_{x_i})} = \overline{O} \subseteq V$

Χώροι Συναρτ. [(X,d) μ.χ.]

Πχ ① $F(X) = \{f: X \to \mathbb{R} \mid f$ συνάρτηση$\}$. Αυτός είναι πραγματικός γραμμικός χώρος (μηδενικός στ. κτλ)

② $B(X) = \{f: X \to \mathbb{R} \mid f$ φραγμένες$\}$.

Προφανώς $B(X) \subseteq F(X)$. Ο $B(X)$ είναι γραμμ. υπόχωρος εφόσον αν $f, g \in B(X)$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda f + \mu g \in B(X)$

(*) Θυμίζω ότι για γραμμικό χώρο θέλουμε να δείξουμε τις ιδιότητες της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολ/μου.

③ $C(X) = \{f: X \to \mathbb{R} \mid f$ συνεχής$\}$ γραμμ. υπόχ. του $F(X)$

Θα μπορούσα εδώ να έχω και τους μιγαδικούς αριθμούς.

! Για εμάς πρέπει εκτός από τα πάνω οι χώροι να πληρούν επιπλέον ιδιότητες. Δες ορισμό.

Ορισμός: Έστω $\mathcal{L}$ ένας γραμμικός υπόχωρος (του F) πραγματικών συναρτήσεων. Ο $\mathcal{L}$ θα λέγεται χώρος συναρτήσεων ή Lattice αν $\forall f, g \in \mathcal{L}$:

(i) $f \vee g \in \mathcal{L}$

(ii) $f \wedge g \in \mathcal{L}$

με $f \vee g: X \to \mathbb{R}$ να είναι $(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$

και $f \wedge g : X \to \mathbb{R} : (f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$

(*) Παρατηρώ ότι $F(X)$, $B(X)$, $C(X)$ εκτός από γραμμικοί είναι και χώροι συναρτήσεων σύμφωνα με τον πάνω ορισμό.

(*) Ο χώρος των $\boxed{\text{παραγωγίσιμων}}$ συναρτήσεων $\boxed{\text{δεν}}$ είναι χώρος συναρτήσεων σύμφωνα με το πάνω ορισμό.

(*)
$$\left.\begin{aligned} \max\{a,b\} &= \frac{a+b+|a-b|}{2} \\ \min\{a,b\} &= \frac{a+b-|a-b|}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f \vee g)(x) = \frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2} \quad (1)$$

και

$$(f \wedge g)(x) = \frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2} \quad (2)$$

Από το (1), (2) έπεται ότι $C(X)$ χώρος συν

Πρόταση: Έστω $\mathcal{A}$ γρ. υπόχωρος του $F(X)$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(i) $f \vee g \in \mathcal{A}$, $\forall f, g \in \mathcal{A}$

(ii) $f \wedge g \in \mathcal{A}$ $\forall f, g \in \mathcal{A}$

(iii) $|f| \in \mathcal{A}$ $\forall f \in \mathcal{A}$

Απόδειξη

Προκύπτει άμεσα απο (1) και (2)

Ορισμός: Έστω $\mathcal{A}$ γραμμικός υπόχωρος του $\boxed{B(X)}$. Ορίζω την άπειρη νόρμα $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$. Αυτή ονομάζεται ομοιόμορφη νόρμα.

Απόδειξη

Θέλω η νόρμα να είναι αριθμός και αν δεν είμαστε σε φραγμένο χώρο τότε η νόρμα είναι άπειρο.

Πρόταση: Η $\|\cdot\|_\infty : A \to [0, +\infty)$ είναι νόρμ

Απόδειξη

(i) $\|f\|_\infty = 0$ αν-ν $f \equiv 0$ και $\|-f\|_\infty = \|f\|_\infty$

(ii) Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{A}$ τότε $\|\lambda f\|_\infty = \sup\{|\lambda f(x)| : x \in X$

$= \sup\{|\lambda||f(x)| : x \in X\}$

$= |\lambda| \sup\{|f(x)| : x \in X\} = |\lambda| \|f\|_\infty.$

Ορισμός: Αν A γραμμόχωρος του $B(X)$ ορίζω
$D_\infty = D: A \times A \to [0, +\infty)$
$D_\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty$.
Το D λέγεται ομοιόμορφη μετρική στον A.

Παρατήρηση: Αν X συμπαγής τότε $C(X)$ είναι γρ. υπόχωρος του $B(X)$, άρα ορίζονται $\|\cdot\|_\infty$, D_∞ στον $C(X)$.
Η $\|\cdot\|_\infty$ δεν είναι εν γένει νόρμα αν ο X όχι συμπαγής.

Ακολουθίες Συναρτήσεων

Ορισμός ① Έστω $\{f_n\}$ μια ακολουθία συναρτήσεων από τον X στον $\mathbb{R}$.
Λέμε $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$ ($f: X \to \mathbb{R}$) (κατά σημείο) αν $\forall x \in X$, $f_n(x) \to f(x)$

Πχ. $f_n(x) = \frac{\frac{1}{n}+x}{2} \to x/2$.

$$\Longleftrightarrow (\forall x \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 = n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N})$$
$$\text{τ.ω } \forall n \geq n_0 \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Ορισμός ② $f_n \xrightarrow{ομ.} f$ (ομοιόμορφα) αν

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ τ.ω } \forall x \in X$$
$$\forall n \geq n_0, \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

(*) Η διαφορά είναι ότι αλλάξαμε την σειρά του $\forall x$ (μπορώ να βρω κάτι που δουλεύει για όλα)
το n_0 δουλεύει για όλα τα X.

<u>Παρατήρηση</u>: $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f \Longrightarrow f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$

$\not\Longleftarrow$

<u>Παραδείγματα</u>

① $X = \mathbb{R}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x + 1/n$

Κ.Σ. συγκλίνει στο x.

Η f_n συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f(x) = x$;

ΝΑΙ διότι:

Έστω $\varepsilon > 0$. Αναζητώ $n_0 \in \mathbb{N}$ (Προφανώς το n_0 εξαρτάται μόνο από το ε) τ.ω. $\forall n \geq n_0$ και $\forall x \in \mathbb{R}$ $\underbrace{|f_n(x) - f(x)|}_{= 1/n} < \varepsilon$

Διαλέγω ένα n_0 οτιδήποτε $> \frac{1}{\varepsilon}$

Τότε, $\forall n \geq n_0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n} < \varepsilon$.

② $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = 1/nx$, $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} 0$
ενώ $f_n \not\xrightarrow{\text{ομ.}} 0$.

Έστω $\varepsilon = 1 > 0$. Αν $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} 0$ τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω
$\forall n \geq n_0$ $\forall x \in (0,1)$ τ.ω $\frac{1}{nx} = |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Διαλέγω $x = 1/n$ όπου $n \geq n_0 \Rightarrow$

$\forall n \geq n_0$: $\frac{1}{n \cdot 1/n} = 1 < \varepsilon = 1$ Άτοπο

<u>Πρόταση</u>: Αν $\{f_n\}$ συγκλίνει ομ. ή κ.σ. τότε η οριακή συνάρτηση είναι μοναδική.

Απόδειξη

- Έστω ότι $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma} f, g$ $\forall x \in X$ $f_n(x) \to f(x)$ και $f_n(x) \to g(x)$

$\Rightarrow \forall x \in X$ $\boxed{f(x) = g(x)}$

- Έστω ότι $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$ και $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} g$

$\Rightarrow f_n \to f, g \Rightarrow \boxed{f(x) = g(x)}$

Πρόταση: Έστω $f_1, f_2, \ldots \in \ell(X)$ ΤΑΕΙ:

(i) $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$

(ii) $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ ή $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$

Απόδειξη

(ii) → (i) Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall n \geq n_0$ $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon \Rightarrow$

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall n \geq n_0$ $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X\} < \varepsilon$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall n \geq n_0$ $\forall x \in X$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\Rightarrow \boxed{f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f}$

(i)⇒(ii) Έστω $\varepsilon>0$. Τότε, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall n \geq n_0$
$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon/2 \quad \forall x \in X$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall n \geq n_0 \; \|f_n(x)-f(x)\|_\infty =$

$\sup\{|f_n(x)-f(x)| : x \in X\} \overset{?}{\leq} \varepsilon/2 < \varepsilon$

$\Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \to 0$

<u>Ορισμός</u>: Έστω $\{f_n\}$ ακολουθιακή συνάρτηση. Η $\{f_n\}$ λέμε ότι είναι <u>Cauchy ομοιομ.</u> αν-ν $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall n,m \geq n_0 \; \forall x \in X$ να ισχύει ότι

$$\boxed{|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon}$$

<u>Πρόταση</u>: Η $\{f_n\}$ είναι ομ. Cauchy αν-ν είναι Cauchy ως προς την μετρική D_∞ (ισοδύναμα ως προς $\|\cdot\|_\infty$)

! Αν συγκλίνει κατά σημείο μπορώ να πω ότι έχει οριακή συνάρτηση αλλά όχι ότι έχει "καλό" όριο

<u>Θεώρημα</u>: $\{f_n\}$ ομ. Cauchy αν-ν $\exists f: X \to \mathbb{R}$ τ.ω

$$f_n \xrightarrow{ομ} f$$

<u>Απόδειξη</u>

(⇐) $f_n \xrightarrow{ομ} f$: Έστω $\varepsilon>0$. Τότε, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall n \geq n_0 \; |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon/2 \quad \forall x \in X$.
Για $m,n \geq n_0$ έχω $|f_n(x)-f_m(x)| \leq |f_n(x)-f(x)| + |f(x)-f_m(x)| < \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon \; \forall x \in X \Rightarrow \{f_n\}$ ομ. Cauchy

$\Rightarrow$ $\{f_n\}$ ομ. Cauchy $\Rightarrow$ $\{f_n\}$ Cauchy $\forall x \in X$

$\Rightarrow \forall x \in X \ \exists \ f(x) \in \mathbb{R}$ τ.ω $f_n(x) \to f(x)$.
Άρα, αρκεί ν.δ.ο $f_n \xrightarrow{ομ.} f$. Έστω $\varepsilon > 0$.
Τότε, $\exists \ n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall n \geq n_0 \forall m \geq n_0$

$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon/2 \quad \forall x \in X$.

$\overset{m \to \infty}{\Longrightarrow} \forall n \geq n_0 \ \forall x \in X, \ |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

$\Rightarrow \boxed{f_n \xrightarrow{ομ.} f}$